Όγδοο (Γενικό) Τεστ, Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια. Αν $f(x) = x^4 - 2x^2$, για κάθε $x \in (0,1)$, να υπολογίσετε την τιμή $f(i)$.

(ii) Ας είναι D τόπος και $g\colon D \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση στον D, ο οποίος περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1)$.

(a) Αν

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{g(z)}{(n+1)z-1} dz = 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

αποδείξτε ότι η g είναι ταυτοτικά μηδέν στο D.

(b) Αν

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{g(z)}{((n+1)z-1)^3} dz = 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

με $g'(0) = 0$, αποδείξτε ότι η g είναι σταθερή στο D.

Θέμα 2

(i) Να βρεθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^2 + 5 - 2i}{(z-2+i)(z+1)^2} = \frac{1}{z-2+i} - \frac{2}{(z+1)^2}$$

σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο 1, καθώς επίσης και ακτίνα σύγκλισης αυτής.

(ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} |\cos(x+it)| = +\infty.$$

Θέμα 3

(i) Ας είναι μία συνάρτηση $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν

$$f(z) = h^3(x,y) + ih(x,y), \ z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$$

είναι ακέραια συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & , \ z \neq 0 \\ 0 & , \ z = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $(0,0)$. Είναι η f μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 = 0$; Αν όχι, τότε μήπως είναι $\mathbb{R}$ −διαφορίσιμη στο σημείο $z_0 = 0$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Θέμα 4

(i) Δίνεται πολυώνυμο $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ βαθμού $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι:

(a) το P έχει ακριβώς n (διαφορετικές ή ίσες) ρίζες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών.

(b) η συνάρτηση $Q = \dfrac{1}{P}$ έχει το πολύ n διαφορετικούς πόλους και ο καθένα τους έχει τάξη μικρότερη ή ίση του n.

(ii) Να εξετάσετε αν το σημείο 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!